Examen 15h45-18h45
Calcul stochastique et modèles de diffusion
Amphi 8C Halle aux Farines

Pas de documents autres que les notes manuscrites du cours; pas de téléphone.

12 Novembre 2018

Exercice 1 On considère l'équation stochastique (E)

$$\begin{cases} dX_t = dB_t + \frac{1}{2X_t}dt \\ X_0 = x_0 > 1, \end{cases}$$

où x_0 est réel et B un mouvement Brownien issu de 0. On pose dans la suite

$$T_0 = \inf\{t \geqslant 0, X_t = 0\},\ T_\epsilon = \inf\{t \geqslant 0, X_t \leqslant \epsilon\}, \epsilon > 0.$$

1. Soit ϕ_ϵ une fonction C^∞ telle que

$$\begin{cases} \phi_\epsilon(x) = \frac{1}{2x} \text{ si } x \geqslant \epsilon, \\ \phi_\epsilon(x) = 0 \text{ si } x < \epsilon/2 \\ ||\phi_\epsilon'(x)||_\infty \leqslant C_\epsilon \text{ pour une constante } C_\epsilon. \end{cases}$$

   La valeur de ϕ_ϵ sur $(\epsilon/2, \epsilon)$ est sans importance. Montrer que l'équation $\begin{cases} d\tilde{X}_t = dB_t + \phi_\epsilon(\tilde{X}_t)dt \\ \tilde{X}_0 = x_0 > 1, \end{cases}$ admet une unique solution forte.
2. On pose $\tilde{T}_\epsilon = \inf\{t \geqslant 0, \tilde{X}_t \leqslant \epsilon\}$. Montrer que $\tilde{X}$ est solution de (E) pour $t < \tilde{T}_\epsilon$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une unique solution forte pour $t < T_\epsilon$.
4. En déduire que la solution est bien définie pour $t < T_0$.
5. Soit $0 < a < 1$. Quelle est l' EDS satisfaite par $Y_t := \frac{1}{a}X_{ta^2}, t < T_0$?
6. Quelle est l'équation satisfaite par $Z_t = \ln X_t,\ t < T_\epsilon$. Que pouvez-vous dire de Z_t ?
7. On pose maintenant pour $0 < r < 1 < R$, $\tau := \inf\{t \geqslant 0, X_t = r \text{ ou } X_t = R\}$ et

$$\psi(x) = \mathbb{P}_x\left(X_\tau = R\right).$$

   (a) Montrer que $M(t) = \mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{X_\tau = R}|\mathcal{F}_t)$ est une martingale. Vérifier que

$$M(t) = \psi(X_{t\wedge\tau}).$$

   Indication : séparer les cas $t \geqslant \tau$ et $t < \tau$ et utiliser une propriété des solutions d'EDS.

   (b) On admet que l'on peut appliquer la formule d'Ito à $\psi(X_t)$, $t < \tau$ (ψ est donc de classe C^2). Déduire de la question précédente que ϕ est solution d'une equation différentielle de second ordre. *Indication : on admettra que pour tout intervalle d'intérieur non vide $I \subset [r, R]$, $\mathbb{P}(X_t \in I, t < \tau) > 0$*

   (c) Montrer que $\psi(x) = c_1 + c_2 \ln x$ pour des réels c_1, c_2 que l'on déterminera.
8. En faisant varier r en déduire que $T_0 = \infty$ p.s.

Exercice 2. On se donne un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geqslant 0}$ sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$, et on considère l'équation différentielle stochastique

$$X_0 = 0, \qquad dX_t \ = \ -\frac{1}{2}e^{-X_t^2}\,dt - e^{-\frac{X_t^2}{2}}\,dB_t.$$

1. Justifier que cette EDS admet une unique solution forte.
2. Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

(a) Écrire la formule d'Itô pour $(F(X_t))_{t\geq 0}$.

(b) En déduire que $(F(X_t))_{t\geq 0}$ est une martingale locale dès que F vérifie

$$F'' \quad = \quad F'. \tag{1}$$

(c) Résoudre l'équation différentielle (1), et conclure que $(e^{X_t})_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable dont on précisera le crochet.

3. Soient $a, b > 0$. On pose $\tau := \tau_{-a} \wedge \tau_b$, avec $\tau_r := \inf\{t \geq 0\colon X_t = r\}$.

(a) Justifier que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{2X_{t\wedge\tau}}\right] \quad = \quad 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} e^{2X_s - X_s^2}\, ds\right]. \tag{2}$$

(b) À l'aide de (2), trouver une constante $C(a,b)$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[t\wedge\tau] \quad \leq \quad C(a,b).$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que

$$\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) \quad = \quad \frac{1-e^{-a}}{e^b - e^{-a}}. \tag{3}$$

4. En déduire la loi de la variable aléatoire $\sup\{X_t\colon t \geq 0\}$.

Problème : Soit $B_t, t \geqslant 0$ un mouvement Brownien standard dans $\mathbb{R}$. On considère le processus

$$X_t = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{B_s>0} ds, t > 0.$$

Le but de ce problème est de démontrer la loi de l'arcsinus :

$$\mathbb{P}(X_t < u) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{u}), 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

1. Que représente la variable X_t ?
2. Montrer que X_t est égal en loi à X_1 pour tout $t > 0$.
3. On fixe $\lambda > 0$. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on définit la fonction $v_\lambda \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ (et $v_\lambda \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_\pm^*)$)

$$v_\lambda(t,x) = \mathbb{E}e^{-\lambda\int_0^t \mathbb{1}_{x+B_s>0} ds}$$

et sa transformée de Laplace $g_{\rho,\lambda}(x) = \int_{\mathbb{R}^+} v_\lambda(t,x)e^{-\rho t}dt$ avec $\rho > 0$. Montrer que $g_{\rho,\lambda}(0) = \mathbb{E}(\frac{1}{\rho+\lambda X_1})$.

4. Donner l'EDP satisfaite par $v_\lambda(t,x)$ suivant que $x > 0$ ou $x < 0$ en admettant que l'on peut utiliser la formule de Feynman-Kac.
5. Montrer $g_{\rho,\lambda}(x)$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

$$(*)\; g''_{\rho,\lambda}(x) = -2 + 2\rho g_{\rho,\lambda}(x) + 2\lambda \mathbb{1}_{x>0} g_{\rho,\lambda}(x).$$

6. En considérant séparément les équations sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, montrer que la solution générale de $(*)$ s'écrit

$$g_{\rho,\lambda}(x) = A_\pm + B_\pm e^{\gamma_\pm x} + C_\pm e^{-\gamma_\pm x},$$

avec des constantes $A_\pm, B_\pm, C_\pm, \gamma_\pm$ qui dépendent du signe de x.

7. Déterminer les constantes en utilisant le fait que $g_{\rho,\lambda}$ est bornée, continue en 0, et que $g'_{\rho,\lambda}$ est continue en 0. En conclure que $g_{\rho,\lambda}(0) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\lambda+\rho)}}$.
8. Démontrer le résultat en utilisant l'identité

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^n \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$$